CONCOURS TA A EPREUVES COMMUNES
MATHEMATIQUES 2

Durée : 4 heures

La partie II est indépendante de la partie I.

La question III.4) utilise les résultats des parties I et II.

PARTIE I

Soit a et b des réels, a non nul.
On recherche les solutions réelles de l'équation différentielle,

$$(L) : \qquad y'' - 4y = a|x| + b$$

1. Donner la solution générale de (L) sur $]0, +\infty[$.

2. Donner la solution générale de (L) sur $]-\infty, 0[$.

3. Soit φ une solution de (L) sur $\mathbb{R}$, c'est-à-dire une fonction à valeurs réelles définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et telle que, pour tout réel, $\varphi''(x) - 4\varphi(x) = a|x| + b$.

a. Montrer que φ est donnée par :

$$(1) \qquad \begin{cases} \varphi(x) = C_1 \operatorname{ch} 2x + C_2 \operatorname{sh} 2x - \dfrac{ax}{4} - \dfrac{b}{4} & \text{si } x > 0 \\ \varphi(x) = C_1 \operatorname{ch} 2x + (C_2 - \dfrac{a}{4}) \operatorname{sh} 2x + \dfrac{ax}{4} - \dfrac{b}{4} & \text{si } x < 0 \\ \varphi(0) = C_1 - \dfrac{b}{4} \end{cases}$$

où C_1 et C_2 sont deux constantes réelles.

b. Réciproquement, soit φ donnée par **(1)**.
Montrer que φ est solution de (L) sur $\mathbb{R}$.

4. Soit φ_0 solution de (L) sur $\mathbb{R}$ satisfaisant aux conditions initiales $\varphi(0) = 0$, $\varphi'(0) = 0$.

a. Expliciter $\varphi_0(x)$ pour $x > 0$, $x < 0$ et $x = 0$.
φ_0 est-elle unique ?

b. Vérifier que φ_0 est paire.

c. Étudier la branche infinie de φ_0 au voisinage de $+\infty$.
On établira que le graphe de φ_0 admet une droite asymptote si et seulement si $a = -2b$.

PARTIE II

Soit $I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{u}\,du$ et $J(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(tx)}{t^2}\,dt$.

1. Montrer que l'intégrale $J(x)$ converge pour tout x réel.
   Étudier la parité de J.

2. Montrer que $\forall\, x \in \mathbb{R},\ J(x) = |x| J(1)$.

3. Par une intégration par parties, montrer que I converge et que $J(1) = I$.

PARTIE III

On considère : $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(tx)}{t^2(1+t^2)}dt$, $g(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(2tx)}{t(1+t^2)}dt$, $h(x) = \int_0^{+\infty} \frac{2\cos(2tx)}{1+t^2}dt$.

1. Montrer que les intégrales f(x), g(x) et h(x) convergent pour tout x réel.

2. **a.** A l'aide de l'inégalité de TAYLOR-LAGRANGE, établir que
   $\forall\,(t,u) \in \mathbb{R}^2,\ \left|\sin^2(t(x+u)) - \sin^2(tx) - tu\sin(2tx)\right| \le t^2u^2$.

   b. En déduire que $\forall\, x \in \mathbb{R},\ \forall\, u \in \mathbb{R}^*,\ \left|\frac{f(x+u)-f(x)}{u} - g(x)\right| \le \frac{\pi}{2}|u|$
   et que $f' = g$ sur $\mathbb{R}$.

3. $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ g_n(x) = \int_{\frac{1}{n}}^{n} \frac{\sin(2tx)}{t\left(1+t^2\right)}dt$ et $h_n(x) = \int_{\frac{1}{n}}^{n} \frac{2\cos(2tx)}{1+t^2}dt$.

   a. Montrer que $g'_n = h_n$ sur $\mathbb{R}$.

   b. Montrer que $\forall\, x \in \mathbb{R},\ \forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ |h_n(x) - h(x)| \le 4\,\mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{n}\right)$.

   c. En déduire que $g' = h$ sur $\mathbb{R}$.

4. **a.** Calculer $f(x) - J(x)$ en fonction de $h(x)$.

   b. Montrer que f est solution de l'équation différentielle (L) sur $\mathbb{R}$ pour des valeurs de a et b que l'on exprimera en fonction de I et de π.

   c. En se servant de conditions initiales, exprimer $f(x)$ en fonction de x et de I.

   d. Montrer que $\forall\, x \in]0,+\infty[,\ 0 \le Ix - f(x) \le \frac{\pi}{2}$.

   e. En déduire que $I = \frac{\pi}{2}$ et les expression de f(x), g(x), h(x) en fonction de x.

   f. Étudier les variations et dessiner les graphes des fonctions f, g et h.